ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Singularités dispersives de solutions d'équations de type Korteweg-de-Vries.* Note de **Jerry Bona** et **Jean-Claude Saut**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Nous montrons par une méthode directe, que pour des équations du type $u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0$, la norme C^k d'une solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ à donnée initiale $H^k(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ peut exploser en un temps fini, arbitrairement prescrit.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Dispersive singularities of solutions of Korteweg-de-Vries type equations.

The Cauchy problem for equations of the form $u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0$ is considered with initial data in $H^k(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$. It is shown by a direct method that the C^k-norm of the solution can become unbounded at a finite, arbitrarily, positive time.

1. Présentation du problème. — Nous considérons le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqq 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

où p est un entier $\geqq 1$. Le cas $p = 1$ correspond à l'équation de Korteweg-de-Vries.

Il a été remarqué dans [1] que, pour le problème linéaire [le cas $p = 0$ dans (1)], la solution u correspondant à une donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ peut ne pas rester régulière [plus précisément, il peut exister $t_* > 0$ et $x_* \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{\substack{x \to x_* \\ t \to t_*}} |u(t, x)| = +\infty$].

Ceci est dû à la mauvaise décroissance de la fonction d'Airy quand $x \to -\infty$. L'objet de cette Note est de montrer que le même type de phénomène persiste pour le problème non linéaire. Des résultats dans cette direction pour l'équation de KdV sont contenus implicitement dans des travaux de A. Cohen [5], qui utilise la théorie du scattering inverse pour l'équation de KdV, et de Kato [6]. Ce dernier auteur utilise une hypothèse de décroissance très forte sur la donnée initiale. Notre théorie est valable pour toutes les valeurs de p (alors qu'il n'y a pas de théorie du scattering inverse pour $p \geqq 3$), ne fait pas d'hypothèse forte sur la décroissance de la donnée initiale, et conduit à un type prescrit de singularité. Elle est basée sur le comportement asymptotique de la fonction d'Airy et sur de nouveaux résultats d'existence pour (1) et (2) dans des classes de Sobolev avec poids.

2. Existence de solutions dans des classes de Sobolev avec poids. — Les résultats qui suivent constituent un outil essentiel pour la preuve des théorèmes fondamentaux du n° 3. Ils généralisent des résultats de Kato [6] et de Kruzhkov et Faminskii [7].

Soit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, croissante, telle que

$$\begin{cases} w(x) = 1, & x \leqq 0, \\ w(x) = (1 + x^2)^\sigma, & x \geqq 1, \end{cases} \quad \text{où } \sigma \text{ est un nombre positif réel.} \tag{2}$$

On note

$$L^2(\mathbb{R}, w) = \{ f : wf \in L^2(\mathbb{R}) \}, \qquad H^k(\mathbb{R}, w) = \left\{ f : \frac{d^j}{dx^j} f \in L^2(\mathbb{R}, w), j = 0, 1, \ldots, k \right\}.$$

0249-6291/86/03030101 $ 2.00 © Académie des Sciences

THÉORÈME 1. — *On suppose que* $p \leqq 4$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Soit* $u_0 \in H^k(\mathbb{R}, w)$.

(i) *Si* $k=0$, *soit* $\sigma \geqq 0$ *arbitraire pour* $p \neq 1$ *et* $0 \leqq \sigma \leqq 3/4$ *pour* $p=1$. *Il existe alors* $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}, w))$ *solution de* (1) *et* (2).

(ii) *Si* $k \geqq 1$, *soit* $\sigma \geqq 0$ *arbitraire. On suppose que* $\|u_0\|_{L^2} \leqq \sqrt[4]{15}$ *si* $p=4$. *Il existe alors* $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{k+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R})) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^k(\mathbb{R}, w))$, *unique si* $k \geqq 2$, *solution de* (1) *et* (2).

THÉORÈME 2. — *On suppose ici que* $p \geqq 5$ *et que* $k \in \mathbb{N}^*$. *Soient* $u_0 \in H^k(\mathbb{R}, w)$ *et* $T>0$. *Si* $\|u_0\|_{H^1}$ *est suffisamment petit, il existe* $u \in L^2(0, T; H^{k+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, T; H^k(\mathbb{R}, w))$, *unique si* $k \geqq 2$, *solution de* (1) *et* (2). *Si la restriction sur la taille de* $\|u_0\|_{H^1}$ *est levée, on a le même résultat pour* $k \geqq 2$ *sur un intervalle* $(0, T_*(\|u_0\|_{H^2}))$.

Les démonstrations de ces théorèmes sont longues et techniques. Il s'agit basiquement d'obtenir des estimations *a priori* dans $H^k(\mathbb{R})$ satisfaites par la fonction $v=uw$ qui vérifie l'équation

$$(3)\quad v_t+v_{xxx}-3\frac{w_x}{w}v_{xx}+v\left(-\frac{w_{xxx}}{w}-6\frac{w_x^3}{w^3}+6\frac{w_x w_{xxx}}{w^2}\right) +v_x\left(-3\frac{w_{xx}}{w}+6\frac{w_x^2}{w^2}\right)+\frac{1}{w^p}v^p v_x-\frac{w_x}{w^{p+1}}v^{p+1}=0.$$

3. LES RÉSULTATS PRINCIPAUX.

THÉORÈME 3. — *Soient* $k \geqq 2$ *et* $p \geqq 1$. *Donnons nous* $x_* \in \mathbb{R}$, $t_*>0$. *Alors il existe* $u_0 \in H^k(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ *et* $T=T(\|u_0\|_{H^2})$, $0<t_*<T$, *tels que la solution correspondante* $u \in L^\infty(0, T; H^k(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^{k+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ *de* (1) *vérifie* $\lim\limits_{\substack{x \to x_* \\ t \to t_*}} |\partial^k u(x, t)/\partial x^k| = +\infty$.

THÉORÈME 4. — *Soient* $p<4$, $t_*>0$, $x_* \in \mathbb{R}$. *Il existe* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ *et une solution* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ *de* (1) *et* (2) *telle que* $\lim\limits_{\substack{x \to x_* \\ t \to t_*}} |u(x, t)| = +\infty$.

THÉORÈME 5. — *Soient* $p \geqq 1$, $t_*>0$, $x_* \in \mathbb{R}$. *Il existe* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, $T=T(\|u_0\|_{H^1})$, $0<t_*<T$, *et une solution* $u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ *telle que* $\lim\limits_{\substack{x \to x_* \\ t \to t_*}} |\partial u(x, t)/\partial x| = +\infty$.

Indications sur les démonstrations. — Nous en indiquons ici le principe dans le cas $p=1$, $k=0$, $x_*=0$, $t_*=1$ (*cf.* théorème 4).

Considérons $u_0(x)=\text{Ai}(-x)/(1+x^2)^\sigma$, $3/16<\sigma<1/4$, où Ai est la fonction d'Airy,

$$\text{Ai}(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\theta^3}{3}+\theta\xi\right)d\theta.$$

On remarque que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, mais $u_0 \notin H^1(\mathbb{R})$. Soit u la solution correspondante de (1) et (2) obtenue par le théorème 1, (i). Alors u peut se représenter sous la forme :

$$(4)\qquad u(x, t)=A(\,.\,, t)*u_0-\int_0^t\int_{-\infty}^\infty A(x-y, t-\tau)\,uu_x(y, \tau)\,dy\,d\tau,$$

où $A(x, t)=(1/t^{1/3})\,\text{Ai}(x/t^{1/3})$, et $*$ représente la convolution en x.

Quand $t \to 1$, la valeur en $x=0$ du premier terme du membre droit de (4) tend vers $\int_{-\infty}^\infty \text{Ai}^2(-y)/(1+y^2)^\sigma\,dy=+\infty$, avec notre choix de σ. Le second terme s'écrit, après intégration par parties :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^{1/3}} \mathrm{Ai}'\left(\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/3}}\right) u^2(y, \tau)\, dy\, d\tau.$$

En utilisant la régularité de u [*cf.* théorème 1, (i)] et les propriétés asymptotiques de la fonction d'Airy, on peut alors montrer que I est bornée au voisinage de $x=0$, $t=1$.

4. Compléments et remarques. — (i) Ce qui précède montre en particulier que les résultats de Kato [6] et de Krushkov et Faminskii [7] pour l'équation de Korteweg-de-Vries sont quasiment optimaux : si par exemple $u_0 \in H^k(\mathbb{R})$, $k \geqq 2$, la solution correspondante u ne vérifie pas en général $u(t) \in C^k(\mathbb{R})$ pour tout $t>0$, bien que $u(t) \in C^k(\mathbb{R})$ pour presque tout t.

(ii) On peut facilement obtenir des solutions de (1) dont les singularités spatiales forment un ensemble dense.

(iii) Les mêmes méthodes permettent de traiter le cas d'équations à partie dispersive plus générale, et le cas de certains systèmes de type Boussinesq [4]. Nous renvoyons à [3] où l'on trouvera aussi des démonstrations détaillées.

(iv) Dans le cas $p \geqq 5$, des simulations numériques [2] suggèrent que la norme $H^k(\mathbb{R})$ $(k \geqq 2)$ de la solution locale de (1) ne reste pas bornée pour tout t, pour une donnée initiale arbitrairement grande dans $H^k(\mathbb{R})$. Aucune preuve n'est connue à ce jour. Ce problème est très différent de celui traité ici, comme le montre l'exemple suivant : le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u^{2p}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad p \geqq 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

possède pour tout $u_0 \in H^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, une solution

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\ H^k(\mathbb{R})) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ H^{k+1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})).$$

Cependant, l'analyse du n° 3 s'applique et il existe des $u_0 \in H^k(\mathbb{R})$ conduisant à des solutions qui admettent des singularités dispersives.

Reçue le 21 avril 1986.

Références bibliographiques

[1] T. B. Benjamin, J. L. Bona et J. J. Mahony, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A 272, 1972, p. 47-78.

[2] J. L. Bona, V. A. Dougalis et O. A. Karakashian, *J. Comp. & Math. with Appl.* (à paraître).

[3] J. L. Bona et J.-C. Saut, *Dispersive blow-up of solutions of nonlinear dispersive wave equations*, en préparation.

[4] J. L. Bona et J.-C. Saut, *Some properties of Boussinesq-type systems for nonlinear dispersive waves*, en préparation.

[5] A. Cohen Murray, *Duke Math. J.*, 45, 1978, p. 149-181.

[6] T. Kato, *Studies in applied mathematics, Advances in mathematics supplementary studies*, 8, 1983, p. 93-128.

[7] S. N. Kruzhkov et A. V. Faminskii, *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 48, 1984, p. 391-421.

J. B. : *Department of Mathematics, The University of Chicago, Chicago, Illinois* 60637, *U.S.A.*;

J.-C. S. : *Laboratoire d'Analyse numérique*, Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*.