I - Groupes algébriques - variétés de drapeaux

Déf (1) Un groupe algébrique linéaire G sur $\mathbb{C}$ est sous-groupe fermé (Zariski) de $GL_n(\mathbb{C})$.

(2) Un G-module rationnel est un $\mathbb{C}[G]$-comodule, ie, une application $V \xrightarrow{\Delta_V} V \otimes \mathbb{C}[G]$ satisfaisant des axiomes naturels.

NB (1) Si $\dim V < \infty$ et $\Delta_V(v_i) = \sum_j v_j \otimes f_{ji}$, (v_i) base de V, alors $\rho_V : G \to GL(V)$, $g \mapsto (f_{ji}(g))_{i,j}$ est un morphisme de groupes algébriques.

(2) $\forall V$ G-module rationnel, $V = \bigcup_{\substack{W \subset V \\ \dim W < \infty}} W$.

EX $\mathbb{C}[G]$ G-module rationnel tel que $(g \cdot f)(g') = f(g'g)$, noté ρ

Théorème
(1) $\forall g \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists !\, (g_u, g_s)$ tel que $g = g_u g_s$, $\rho(g_u)$ unipotent, $\rho(g_s)$ semi-simple, $g_u g_s = g_s g_u$.

(2) Si $f : G \to G'$ morph de gp alg alors $f(g_u) = f(g)_u$, $f(g_s) = f(g)_s$

NB En particulier, si $i : G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ alors $i(g_u) = i(g)_u$, $i(g_s) = i(g)_s$.

Def G gp lin

(1) $G_u = \{g ; g = g_u\} = \{$ elements unipotents $\}$

(2) $G_s = \{g ; g = g_s\} = \{$ elements semisimples $\}$

$\Big\}$ sous-variétés fermées de G.

(3) G unipotent si $G = G_u$

(4) G diagonalisable si G commutatif et $G = G_s$.

Théorème G gp lin.

1) G commutatif $\Rightarrow$ $G_s, G_u \subset G$ sg fermés et $G_s \times G_u \xrightarrow{m} G$ isom de groupes algébriques.

(2) G diagonalisable $\Leftrightarrow$ $G \subseteq (\mathbb{C}^\times)^N$ sg fermé.
$\Leftrightarrow$ $G \simeq \pi_0(G) \times G^0$, G^0 un tore.

Def (1) Un tore est un gp alg $\simeq (\mathbb{C}^\times)^N$.

(2) $\{$ caractères $\} = X^*(G) = \mathrm{Hom}_{gp\,alg}(G, \mathbb{C}^\times)$.

NB $X^*(G) \subset \mathbb{C}[G]$ Abelian sg

Def $\forall V \in \mathrm{Rep}\,G$, $\forall \chi \in X^*(G)$, $V_\chi = \{v \in V ; gv = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$.

Théorème

(1) $X^*(G)$ consists of lin. indept vectors of $\mathbb{C}[G]$.

(2) $\forall V \in \mathrm{Rep}\,G$, $\sum_\chi V_\chi$ is direct and equal to V if V is rationnal

(3) G diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}X^*(G)$

G tore $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}X^*(G)$ et $X^*(G)$ torsion free.

Théorème (rigidité) G gp lin, $H \subset G$ sg fermé diagonalisable

Alors $N_G(H)^0 = Z_G(H)^0$, donc $N_G(H)/Z_G(H)$ fini.

Déf (1) $\forall H, H' \subset G$ groupes, $(H,H') \subset G$ sg engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, $a \in H$, $b \in H'$.

(2) $D^1(G) = (G,G)$, $D^{i+1}(G) = (D^i(G), D^i(G))$, G résoluble ssi $D^{\gg 0}(G) = \{1\}$.

(3) $C^1(G) = (G,G)$, $C^{i+1}(G) = (G, C^i(G))$, G nilpotent ssi $C^{\gg 0}(G) = \{1\}$.

Lemme

(1) $1 \to H' \to H \to H'' \to 1$ exact.

H rés $\Leftrightarrow$ H', H'' résolubles

H nilpotent $\Rightarrow$ H', H'' nilpotents

~~absolu~~

(2) G gp linéaire $\Rightarrow$ $D^i(G), C^i(G) \subset G$ sg fermés.

Ex $G = GL_n(\mathbb{C})$, $U_n = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nilpotent, $B_n = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ résoluble, $U_n = (B_n)_u$.

Théorème (Lie-Kolchin) G gp lin, $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ représentation

(1) G résoluble connexe $\Rightarrow$ $\rho(G)$ conjugué à un sg fermé de B_n.

(2) G ~~a~~ unipotent $\Rightarrow$ $\rho(G)$ conjugué à un sg fermé de U_n, donc est nilpotent.

Corollaire G résoluble connexe $\Rightarrow$ $D(G)$ connexe unipotent, et G_u sg fermé, connexe, normal de G.

Théorème G gp linéaire résoluble connexe

(1) $\forall T \subset G$ tore max, $T \times G_u \xrightarrow{\text{mult}} G$ isom de variétés.

(2) Les tores max de G sont conjugués.

Déf (1) Un sg de Borel de G est un sg fermé résoluble connexe maximal

(2) $\mathcal{B} = \{$ sg de Borel de $G\}$.

Théorème G gp linéaire connexe.

(1) Tous les sg de Borel de G sont conjugués.

(2) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists$ quotient géométrique $G \to G/B$ tq.

G/B est une G-variété projective.

Ex Si $G = GL_n(\mathbb{C})$ on a la variété des drapeaux.

NB

(1) G-variété $X \Leftrightarrow \sigma : G \times X \to X$ morphisme tel que

(a) $\sigma_g = \sigma(g, -) \in \mathrm{Aut}(X)$

(b) $g \mapsto \sigma_g$ gp homomorphisme.

(2) Un quotient catégorique de X par G est une paire (Y, f) tq

(a) $f : X \to Y$ G-inv

(b) $\forall f' : X \to Y'$ G-inv $\exists ! \psi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & Y' \end{tikzcd}$$

(3) Un bon quotient de X par G est une paire (Y, f) tq

(a) $f : X \to Y$ G-inv

(b) f affine surjectif

(c) $\forall F \subset X$ G-inv fermé, $f(F) \subset Y$ fermé ($\Leftrightarrow$ Y muni de la topo quotient

(d) $\forall F_1, F_2 \subset X$ " " , $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $f(F_1) \cap f(F_2) = \emptyset$

(e) $\forall U \subset Y$, $\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))^G$, ie, $(f_* \mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Y$.

(4) Un bon quotient est un quotient catégorique

(5) Un " " est géométrique si toutes les G-orbites dans X sont fermées.

Corollaire

(1) Tout tore max est contenu dans un sg de Borel

(2) Toutes les paires (B,T), $B\in\mathcal{B}$, T tore max $\subset B$, sont conjuguées

(3) les sg fermés connexes unipotents max de G sont tous conjugués et sont les B_u, $B\in\mathcal{B}$.

Théorème (Chevalley) G gp lin. connexe.

$\forall B\in\mathcal{B}$ on a $N_G(B) = N_G(B_u) = B$.

Corollaire $G/B \simeq \mathcal{B}$ as a set.

Def. G gp linéaire.

(1) $Rad(G) = \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B\right)^\circ$ est le + grand sg fermé connexe résoluble normal de G ; c'est le radical de G.

(2) $Rad(G)_u = \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B_u\right)^\circ$ est le + grand sg fermé connexe unipotent normal de G ; c'est le radical unipotent de G.

(3) G réductif si $Rad(G)_u = \{1\}$

(4) G semisimple ssi $Rad(G) = \{1\}$

NB { $Rad(G)$ fermé car G est Noethérien.
La normalité de $Rad(G)$ découle du fait qu'il est préservé par tout automorphisme de G, d'après :

Théorème Soit $f: G \to G'$ morphisme surjectif de gp linéaires. Alors $\mathcal{B}(G') = \{f(B);\ B\in\mathcal{B}(G)\}$ et idem pour les tores max et les sg fermés unipotents connexes maximaux.

Proposition G gp lin

$G/Rad(G)$ est ss et $G/Rad(G)_u$ est réductif.

Nb Un sg de Lévi de G, lin. connexe, est un sg connexe $L \subset G$ tq. $G = L \ltimes Rad(G)_u$. $\Rightarrow L \simeq G/Rad(G)_u$ réductif.

car $0 \Rightarrow L$ exist and are conjugate.

car $> 0 \Rightarrow$ ______ for parabolic groups.

Théorème G gp lin connexe, $S \subset G$ Tore

(1) $Z_G(S)$ connexe

(2) $\{B \subset Z_G(S)$ sg Borel contenant $S\} \xrightarrow{\sim} \{B \subset Z_G(S)$ Borel$\}$

$$B \longmapsto B \cap Z_G(S)$$

Déf $\forall G$ gp lin connexe, un sg de Cartan est un sg de la forme $Z_G(T)$, T tore max. 2 sg de Cartan sont conjugués.

Corollaire G gp lin connexe, $T \subset G$ Tore max, $C = Z_G(T)$ sg Cartan

$\forall B \in \mathcal{B}$, $T \subset B \Rightarrow C \subset B$.

Dém $C \cap B$ sg Borel de $Z_G(T)$, donc C nilpotent (non dém) $\Rightarrow C \cap B = C$, ie, $C \subset B$.

□

Déf. G gp lin connexe, T tore max,
$W = W(T, G) = N_G(T)/Z_G(T)$ gp fini (indépendant du choix de T) appelé groupe de Weyl.

Théorème G gp lin connexe

(1) $\forall\, S \subset G$, $\mathcal{B}^S$ sousvar fermée de $\mathcal{B}$ égale à $\{B \in \mathcal{B} \,;\, S \subset B\}$

(2) $\forall\, T \subset G$ tore max, $W(T,G)$ agit simplement transitivement sur $\mathcal{B}^T$ $\Rightarrow$ $|\mathcal{B}^T| = |W(T,G)| < \infty$.

Dém

(1) $B \in \mathcal{B}^S \Leftrightarrow s \in N_G(B) = B$

(2) (i) $\left\{\begin{array}{l} n \in N_G(T) \\ B \in \mathcal{B}^T \end{array}\right. \Rightarrow T = nTn^{-1} \subset nBn^{-1}$

$\Rightarrow N_G(T) \circlearrowright \mathcal{B}^T$

argument hidden. Not given because it's in solvable case.

(ii) $T \subset B \Rightarrow Z_G(T) \subset B$

$\Rightarrow Z_G(T)$ fixe B

$\Rightarrow W(T,G) \circlearrowright \mathcal{B}^T$

(iii) $B,\ B' = gBg^{-1} \in \mathcal{B}^T$

$\Rightarrow T,\ g^{-1}Tg \subset B$

$\Rightarrow \exists\, b \in B \ /\ g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$

$\Rightarrow n := gb^{-1} \in N_G(T)$

$\Rightarrow B' = nBn^{-1} \in W(T,G).B$

(iv) $n \in N_G(T),\ nBn^{-1} = B,\ B \in \mathcal{B}^T \Rightarrow n \in B \cap N_G(T) = N_B(T)$.

Or $N_B(T) = Z_B(T)$ car $\forall g \in N_B(T), \forall t \in T,\ (gtg^{-1})t^{-1} \in T \cap D(B) =$
$= T \cap B_u = \{$

$\Rightarrow n \in Z_G(T)$.

$\square$

Théorème (Chevalley) G gp réductif connexe.

$$\Big(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^T} B\Big)^0 = T$$

Corollaire G gp réductif connexe

(1) T Tore max $\Rightarrow$ $Z_G(T) = T$ (ie, T sg de Cartan)

(2) $Z(G) = \bigcap_{T \text{ Tore max}} T$

(3) $S \subset G$ tore $\Rightarrow$ $Z_G(S)$ gp réd. connexe.

Théorème G gp lin connexe

(1) Tout élt semi simple appartient à un Tore max.

(2) " " unipotent " " sg unipotent connexe max.

(3) " " appartient à un sg de Borel.

II - Groupes réductifs

T tore, $X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gp\,alg}}(\mathbb{G}_m, T)$ = gp Abélien des cocaractères.

La composition induit un couplage

$$X^*(T) \times X_*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

<u>Proposition</u> Ce couplage est parfait, i.e., il identifie $X^*(T)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(T), \mathbb{Z})$ et réciproquement.

<u>Def</u> Une donnée radicielle est un quadruplet $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ où

(a) $X^\vee$, X 2 $\mathbb{Z}$-modules libres de tg fini en dualité parfaite par un couplage $\langle \cdot, \cdot \rangle$

(b) $R \subset X$, $R^\vee \subset X^\vee$ en bijection $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ tels que

$$\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2 \quad \forall \alpha, \quad s_\alpha(R) = R, \quad s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee$$

où s_α, $s_{\check\alpha}$ sont les réflexions de $V = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $V^\vee = X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tq

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \check\alpha \rangle \alpha$$
$$s_{\check\alpha}(x^\vee) = x^\vee - \langle \alpha, x^\vee \rangle \check\alpha$$

On supposera la donnée radicielle réduite, i.e.,

$$\forall \alpha, \beta \in R, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}\beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta.$$

<u>Nb</u> R est un système de racines dans $V = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

<u>Def</u> (1) $Q = \mathbb{Z}R$ = réseau des racines (dans V)

(2) $P = \{ x \in V \,;\, \langle x, \check\alpha \rangle \in \mathbb{Z}, \ \forall \check\alpha \in R^\vee \}$
$=$ réseau des poids (dans V)

(3) $Q^\vee$, $P^\vee$

(4) $W = \langle s_\alpha \rangle \subset GL(V)$

G gp réductif connexe

$T \subset G$ Tore max

$W(T,G)$ = gp de Weyl

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$

R = ens des poids $\neq 0$ de T dans $\mathfrak{g}$, ie,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \quad , \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^T$$

$\forall \alpha \in R$, $G_\alpha = Z_G((\ker \alpha)^0)$, $(\ker\alpha)^0 \subset T$ subtorus.

G_α est un sg réductif connexe de G.

$\forall \alpha \in R \; \exists! \, \check{\alpha}$ ~~coracine~~ ~~propre~~ tel que $W(T, G_\alpha) = \{1, s_\alpha\}$, s_α donné via $\check{\alpha}$ comme p.g.

Proposition (1) $(X^*(T), X_*(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle et $W(T,G)$ est $\simeq$ gp de Weyl W de R.

(2) $\forall \alpha \in R$ $\exists$ isomorphisme $u_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_\alpha$, U_α closed sg of G, tel que $t u_\alpha(x) t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t) x)$ $\forall t, x$.

On a $\mathrm{Im}(du_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ (donc $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$)

(3) T et les U_α ($\alpha \in R$) engendrent G.

Nb les U_α sont des sg unipotents de G normalisés par T.

Proposition

(1) $G = \mathrm{Rad}(G) \cdot D(G)$

(2) $D(G)$ est semi-simple.

(3) $$Z(G) = \bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha$$